Exercice 3.1.

Lors d'une réunion de 50 personnes, 38 % ont des lunettes, 40 % ont une casquette et 50 % ont des lunettes ou une casquette. Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard ait des lunettes et une casquette ?

Correction exercice 3.1.

Notons L l'événement « La personne prise au hasard porte des lunettes » et C l'événement « La personne prise au hasard porte une casquette ».

On sait que $p(L) = 38\ \%$, $p(C) = 40\ \%$ et $p(L \cup C) = 50\ \%$.

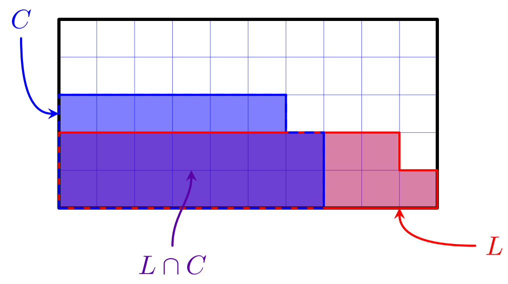
D'après la formule : $p(L \cup C) = p(L) + p(C) - p(L \cap C)$ c'est-à-dire

$$50\ \% = 38\ \% + 40\ \% - p(L \cap C)$$
$$50\ \% = 78\ \% - p(L \cap C)$$

On en déduit que $p(L \cap C) = 28\ \%$.

Voici une illustration de ce cas :

Chaque carré correspond à une personne (c'est-à-dire 2 %), les roses correspondent aux personnes ayant des lunettes, les bleus à ceux ayant une casquette, les violets à ceux ayant lunettes et casquette.



Les carrés restés blancs sont ceux qui n'ont ni lunettes, ni casquette. La probabilité de cet événement noté $\overline{L \cup C}$ est $p\left(\overline{L \cup C}\right) = 1 - p(L \cup C) = 1 - 50\ \% = 50\ \%$.

Exercice 3.2.

On reprend le jeu inventé par Marie dans l'exercice **??**.

Si le joueur tire une boule blanche, il gagne 5 €. S'il tire la boule rouge, il gagne 20 €.

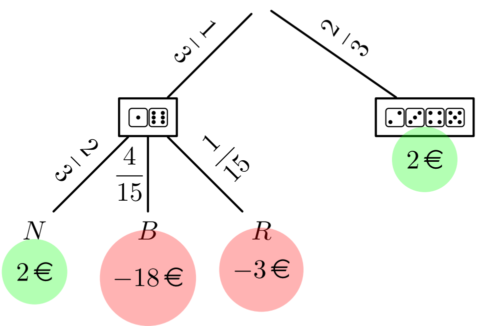
Marie fait payer la participation à son jeu 2 €.

Peut-elle espérer gagner de l'argent avec son jeu ?

Indication : *Sur l'arbre tracé à l'exercice **??**, indiquer sur chaque feuille le **gain** de Marie (quand le joueur perd, Marie a un gain de 2 € ; quand elle donne 20 € au joueur, elle a un gain de −18 € puisque le joueur a payé 2 €).*

Correction exercice 3.2.

Puisque l'indication nous conseille de refaire l'arbre, allons-y.



Marie gagne 2 € si le joueur perd, mais elle perd de l'argent si le joueur gagne. D'ailleurs le joueur ne gagne pas 5 € en piochant une boule blanche, mais seulement 3 € car il a d'abord payé 2 € de participation.

Nous allons calculer l'**espérance de gains** de Marie. Cela signifie la moyenne des gains « probables » de Marie.

Elle a 8 chances sur 9 de gagner 2 € (voir correction **??**). Elle a 1 chance sur 45 de perdre 18 €.

La probabilité qu'elle perde 3 € est donc $p(R) = 1 - \frac{8}{9} - \frac{1}{45} = \frac{4}{45}$.

Son espérance de gains est donc
$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \frac{8}{9} \times 2\,€ + \frac{4}{45} \times (-3\,€) + \frac{1}{45} \times (-18\,€) \\ &= \frac{16}{9}\,€ - \frac{12}{45}\,€ - \frac{18}{45}\,€ \\ &= \frac{80 - 12 - 18}{45}\,€ \\ &= \frac{50}{45}\,€ \\ \mathbb{E} &\simeq 1{,}11\,€ \end{aligned}$$

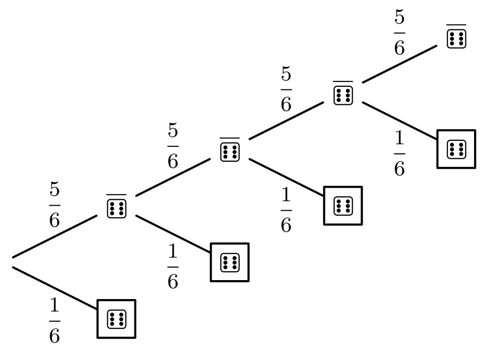
Grâce à la loi des grands nombres vue en quatrième, cela peut s'interpréter ainsi : si Marie fait jouer un grand nombre de personnes, elle peut espérer gagner en moyenne 1,11 € par personne.

Exercice 3.3. Problème du chevalier de Méré.

Quel est l'événement le plus probable : obtenir au moins une fois ⚅ en lançant 4 fois un dé ou bien obtenir au moins une fois un double ⚅ en lançant 24 fois une paire de dés ?

Correction exercice 3.3.

La probabilité d'obtenir au moins une fois ⚅ avec 4 lancers d'un dé peut s'obtenir grâce à cet arbre (pour simplifier, je ne fais que deux cas : on obtient ⚅ (noté ⚅) ou on n'obtient pas ⚅ (noté $\overline{⚅}$)) :



La probabilité d'obtenir ⚅ au premier tirage est $\frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir ⚅ au deuxième tirage est $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

La probabilité d'obtenir ⚅ au troisième tirage est $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$.

La probabilité d'obtenir ⚅ au quatrième tirage est $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{125}{1\,296}$.

Exercice α.

> Quelle est la probabilité d'obtenir ⚅ exactement au 20ᵉ lancer ? Au 100ᵉ lancer ?
> *La réponse doit être argumentée et sous forme de fraction, cet exercice est noté en bonus. Envoyez-moi vos réponses sur prof.calmet@gmail.com, ou sur pronote, ou via moodle, comme vous voulez.*

La probabilité d'obtenir au moins une fois ⚅ en quatre lancers est donc

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} + \frac{125}{1\,296} \\ &= \frac{216}{1\,296} + \frac{180}{1\,296} + \frac{150}{1\,296} + \frac{125}{1\,296} \\ &= \frac{216 + 180 + 150 + 125}{1\,296} \\ p_1 &= \frac{671}{1\,296} \end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir au moins une fois ⚅⚅ en 24 lancers de 2 dés ne peut pas s'obtenir grâce à un arbre, ou alors il serait si démesurément grand qu'il serait illisible.

En revanche, il y a une méthode fort simple pour calculer cette probabilité : nous allons regarder l'événement contraire « Ne jamais obtenir ⚅⚅ en 24 lancers ».

En effet, « ne pas obtenir ⚅⚅ » a, à chaque étape, une probabilité de $\frac{35}{36}$.

Ainsi, en lançant 24 fois le dé, la probabilité de ne jamais obtenir ⚅⚅ est $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = \frac{35^{24}}{36^{24}}$.

Et on en déduit donc que la probabilité cherchée, celle de l'événement contraire est :

$$p_2 = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}}$$

Ma calculatrice est très efficace et donne :

$$p_2 = \frac{11\,033\,126\,465\,283\,976\,852\,912\,127\,963\,392\,284\,191}{22\,452\,257\,707\,354\,557\,240\,087\,211\,123\,792\,674\,816} \simeq 0{,}49$$

Puisque $p_1 = \frac{671}{1\,296} \simeq 0{,}52$, on peut en déduire qu'il est plus probable d'obtenir ⚅ au moins une fois en 4 lancers que ⚅⚅ au moins une fois en 24 lancers.

Exercice β.

> Recalculer la probabilité d'obtenir ⚅ au moins une fois en 4 lancers grâce à cette méthode.
> *La réponse doit être détaillée et argumentée, cet exercice est noté en bonus. Envoyez-moi vos réponses sur prof.calmet@gmail.com, ou sur pronote, ou via moodle, comme vous voulez.*

Voir Le Chevalier de Méré sur internet.