3) Équations $x^2 = a$

Propriété.

Soit a un nombre.
L'équation $x^2 = a$...

- ... a deux solutions $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$ $\boxed{\text{si } a > 0}$,
- ... a une solution double $x = 0$ $\boxed{\text{si } a = 0}$,
- ... n'a aucune solution $\boxed{\text{si } a < 0}$.

▶ **Preuves**

▶ Si $a > 0$, on peut écrire $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$.
L'équation $x^2 = a$ peut s'écrire $x^2 - a = 0$ autrement dit $x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0$.
C'est la différence de deux carrés, on peut factoriser grâce à la troisième identité remarquable :

$$\begin{aligned} x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 &= 0 \\ (x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) &= 0 \end{aligned}$$

C'est une équation produit nul qui a deux solutions : $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$. ■

▶ Si $a = 0$, l'équation s'écrit $x^2 = 0$ ou $x \times x = 0$.
C'est une équation produit qui a une solution double : $x = 0$. ■

▶ Si $a < 0$, on a une égalité entre un nombre au carré (donc toujours positif), et un nombre négatif. C'est impossible (avec des nombres *réels*), donc l'équation n'a aucune solution. ■

Exemples.

- On cherche les nombres qui au carré donnent 16. On sait que $\sqrt{16} = 4$. Cependant, on a aussi $-\sqrt{16}$, en effet :

$$\left(-\sqrt{16}\right) \times \left(-\sqrt{16}\right) = (-4) \times (-4) = 16.$$

  Il y a deux nombres qui au carré donnent 16 : ce sont 4 et -4.
- L'équation $x^2 = 9$ a deux solutions : $x = \sqrt{9} = 3$ et $x = -\sqrt{9} = -3$
- L'équation $x^2 = 37$ a deux solutions : $x = \sqrt{37}$ et $x = -\sqrt{37}$.
- L'équation $x^2 = -25$ n'a aucune solution. En effet, x^2 est nécessairement positif, et -25 est négatif.